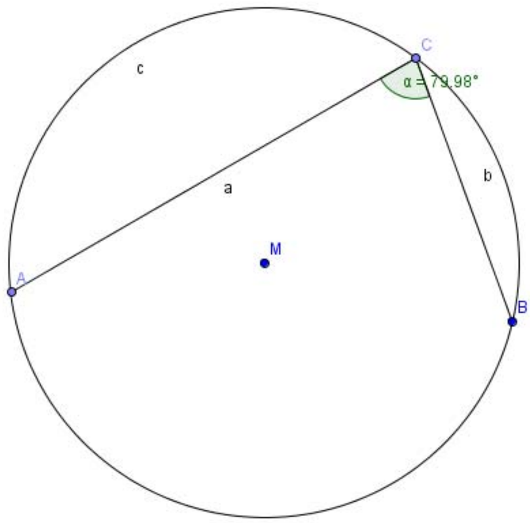
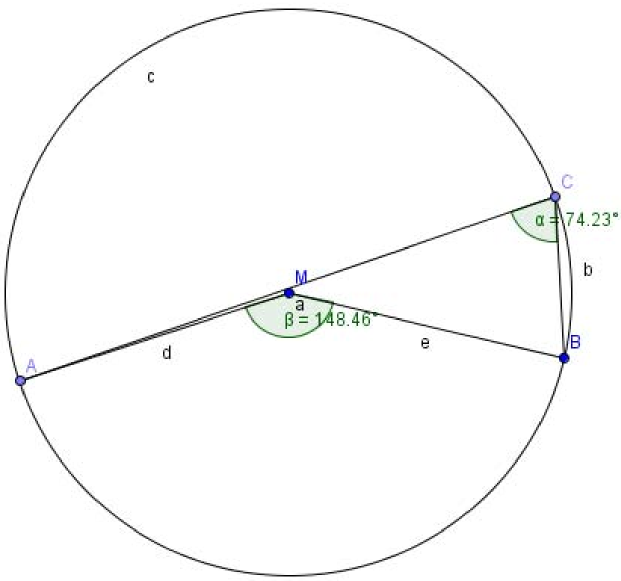
Uitwerkingen Hst 12 Bewijzen in de vlakke meetkunde

1. ∠ ACB verandert niet als we punt C over de grootste boog gaan verplaatsen.



2a.

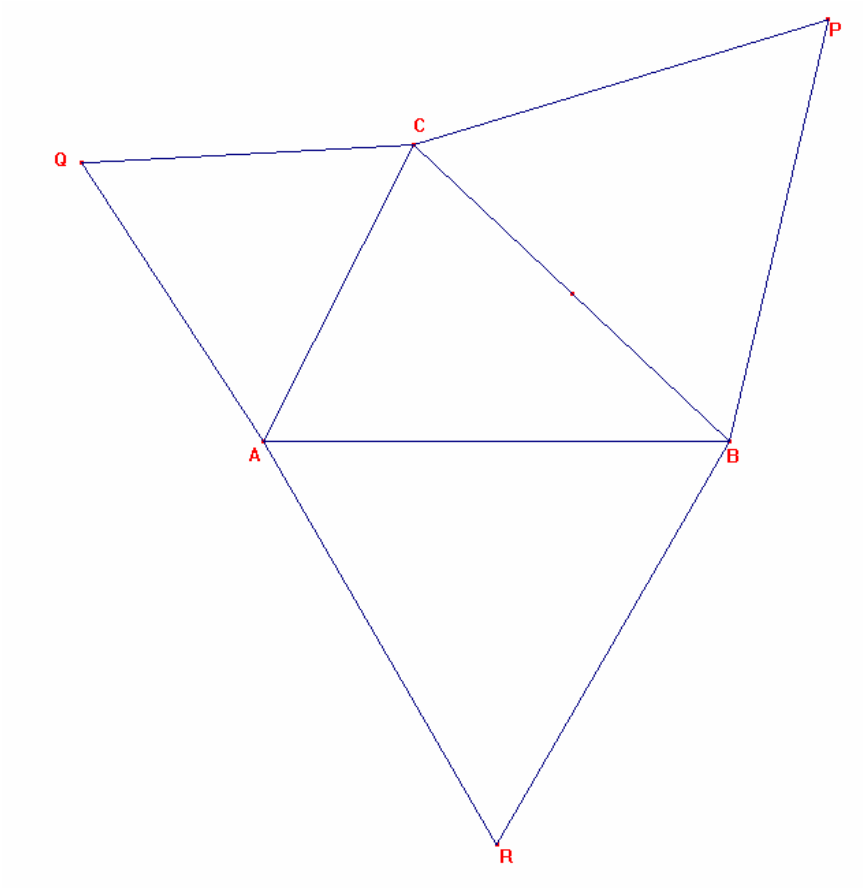


∠ AMB = 148,46°

b. ∠ ACB = 74,23°

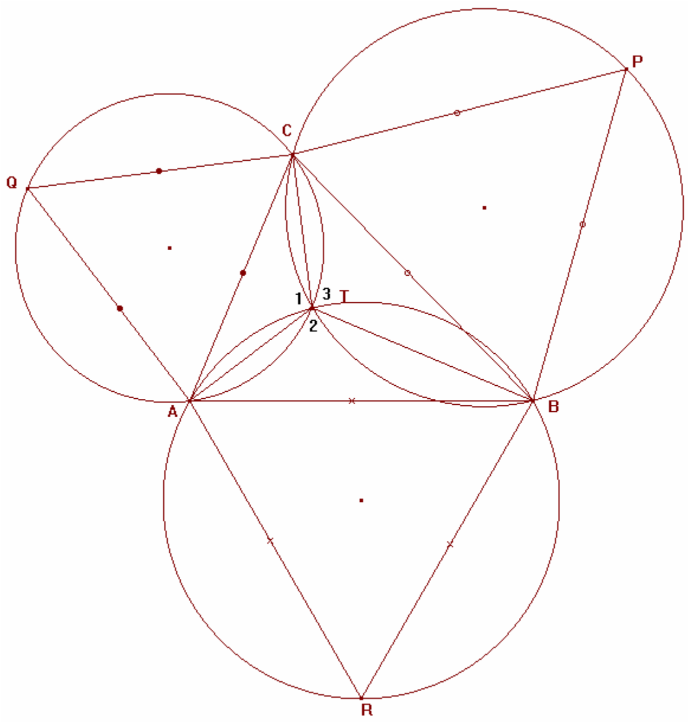
c. Dat is dus de helft van ∠ AMB.

3a.

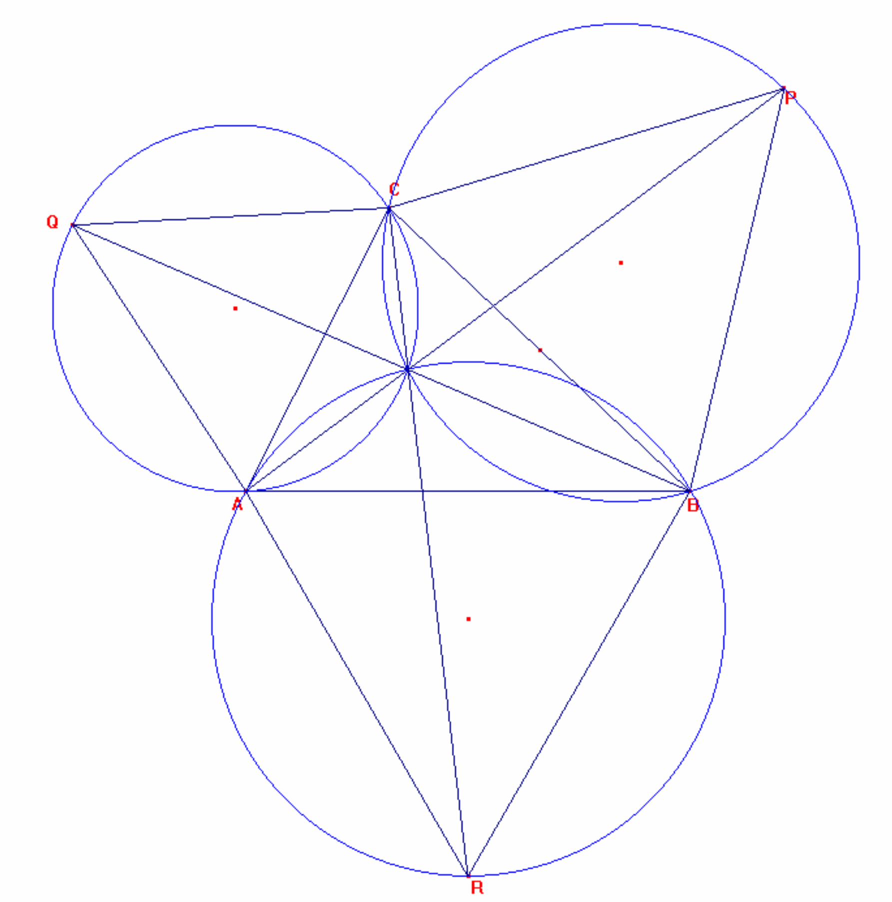


b.

De drie cirkels snijden elkaar in één punt.



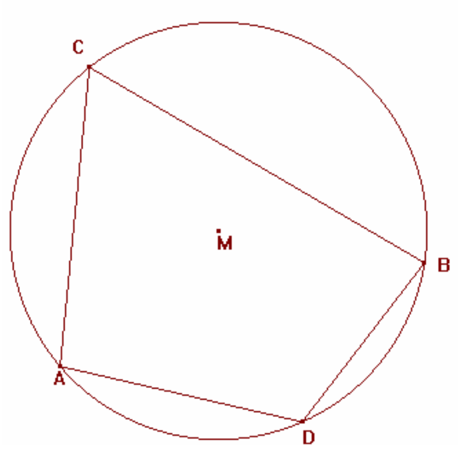
c. Deze lijnstukken snijden elkaar in het snijpunt van de drie cirkels uit onderdeel b



4a.

Bewijs:
Teken de gehele cirkel en kies een vast punt D gelegen op de andere cirkelboog door A en B. $\Rightarrow$

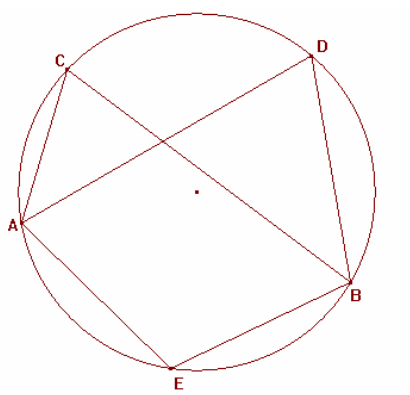
$$\left.\begin{array}{l} \angle ACB + \angle ADB = 180°(koordenvierhoek) \\ \angle ADB \text{ is een vaste hoek} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\angle ACB$ is ook een vaste hoek
Dus $\angle$ ACB is onafhankelijk van de plaats van punt C op boog AB.

b. Uit de laatste opmerking bij onderdeel a volgt meteen het antwoord op de vraag bij onderdeel b.

5a..



Gegeven: C en D liggen aan dezelfde kant van AB en $\angle$ ACB = $\angle$ ADB

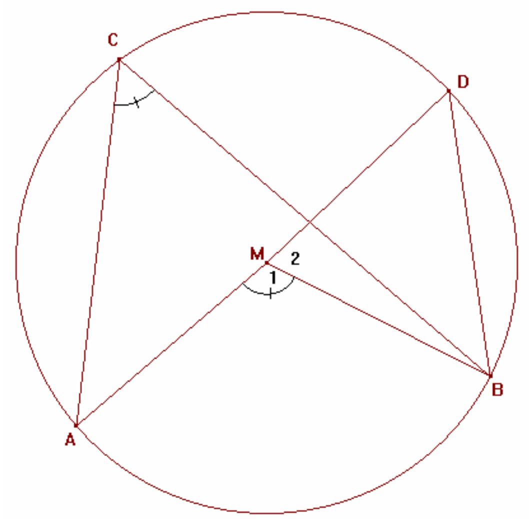
Te bew. C en D liggen op dezelfde cirkelboog AB

Bewijs: Teken een cirkel door A, C en B ,waarbij punt E niet op de cirkelboog van ACB ligt.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle C + \angle E = 180°(koordenvierhoek) \\ \angle C = \angle D\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D + \angle E = 180° \Rightarrow$$ vierhoek AEBD is ook een koordenvierhoek $\Rightarrow$ D ligt ook op de cirkel door A , B en E en dus ook op dezelfde cirkelboog als punt C.

b. In vierhoek ABCD liggen de punten C en D aan dezelfde kant van AB. Als geldt dat $\angle$ ACB = $\angle$ ADB dan liggen de punten C en D op dezelfde cirkelboog AB $\Rightarrow$ A,B,C en D liggen dus op dezelfde cirkel $\Rightarrow$ vierhoek ABCD is dus een koordenvierhoek.

6a.



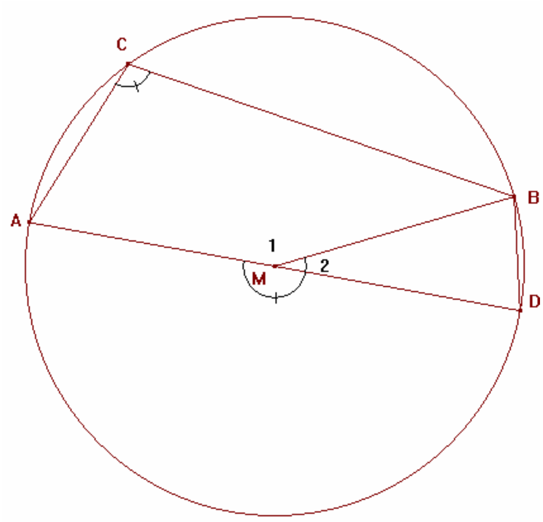
Gegeven : cirkel met middelpunt M en de punten A, B en C op de cirkel.
Verder geldt dat M en C aan dezelfde kant van AB liggen.

Te bew. $\angle$ ACB = 0,5 . $\angle$ AMB

Bewijs: Verleng AM tot middellijn AD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle D(zelfde\ boog) \\ \angle D = \angle B(gelijkbenig) \\ \angle M_2 + \angle D + \angle B = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle M_2 + 2.\angle C = 180^\circ \\ \angle M_1 + \angle M_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow 2.\angle C = \angle M_1 \Rightarrow \angle ACB = \tfrac{1}{2}.\angle AMB$$

6b.



Gegeven : cirkel met middelpunt M en de punten A, B en C op de cirkel.
Verder geldt dat M en C niet aan dezelfde kant van AB liggen.

Te bew. $\angle$ ACB = 0,5 . $\angle$ AMB

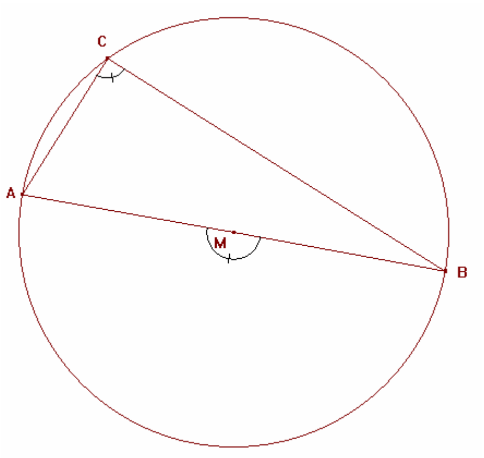
Bewijs: Verleng AM $\Rightarrow$ middellijn AD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle D = 180^\circ - \angle C(koordenvierhoek)\\ \angle MBD = \angle D(gelijkbenig)\\ \angle M_2 + \angle D + \angle MBD = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle M_2 + 2.(180^\circ - \angle C) = 180^\circ\\ \angle AMB(grote\ boog) = 180^\circ + \angle M_2 \Rightarrow \angle M_2 = \angle AMB - 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\angle AMB - 180^\circ \ + 360^\circ - 2.\angle C = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AMB = 2.\angle C$$

$\Rightarrow \angle$ACB = 0,5 . $\angle$AMB

6c. Gegeven :

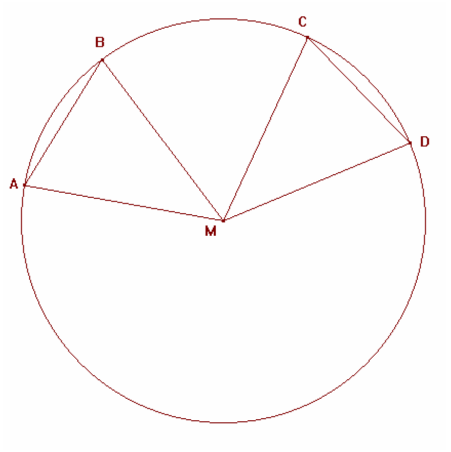


Cirkel met middellijn AB en C op de cirkel

Te bew. $\angle$ ACB = 0,5 . $\angle$ AMB

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle AMB = 180^\circ (gestrekte\ hoek)\\ \angle ACB = 90^\circ (Thales)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACB = 0,5.\angle AMB$

7a.

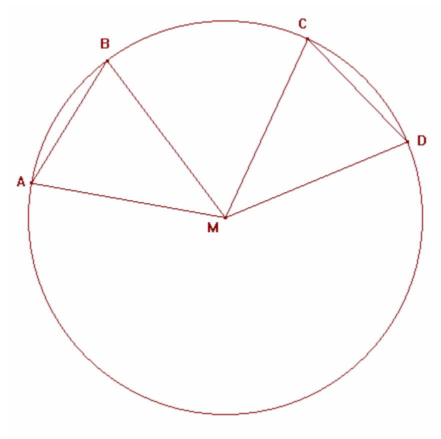


Gegeven : cirkel met middelpunt M.
bg (AB) = bg (CD)

Te bew. AB = CD

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}bg(AB) = bg(CD) \Rightarrow \angle AMB = \angle CMD\\ AM = CM(straal)\\ BM = DM(straal)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta CMD(zhz) \Rightarrow AB = CD$

7b.



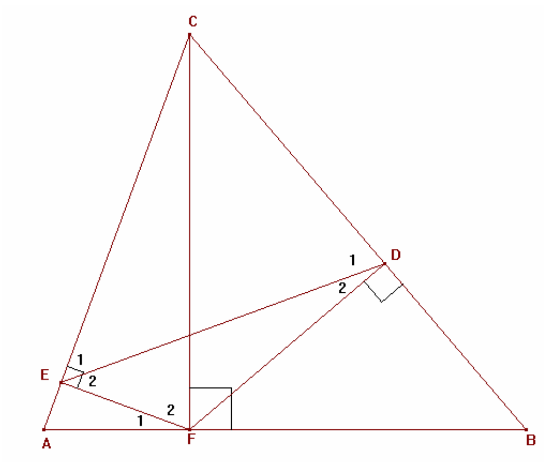
Gegeven:
Cirkel met middelpunt M en de koorden AB en CD zijn gelijk .

Te bew. bg(AB) = bg(CD)

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD(geg) \\ AM = CM\,(straal) \\ BM = DM\,(straal) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta CMD(zzz) \Rightarrow \angle AMB = \angle CMD \Rightarrow bg(AB) = bg(CD)$$

8.



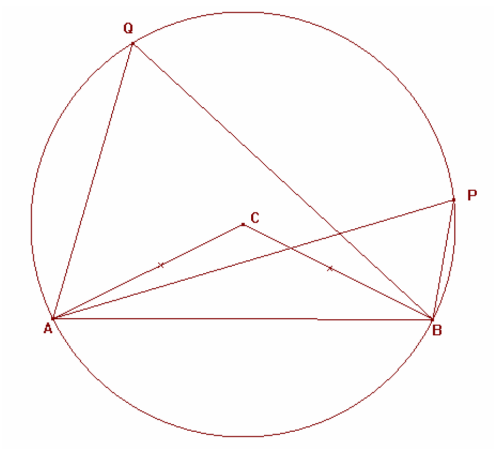
Geg. Δ ABC met CF ⊥ AB en FE ⊥ AC ; FD ⊥ BC

Te bew. ∠ CDE = ∠ A.

Bewijs: $\angle E_{12} + \angle D_{12} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ vierhoek EFDC is een koordenvierhoek ⇒ EFDC liggen op een cirkel ⇒

$$\left.\begin{array}{l} \angle D_1 = \angle F_2 (zelfde\ boog) \\ \left.\begin{array}{l} \text{In } \Delta\text{AFC geldt: } \angle A = 90^\circ - \angle C \\ \text{In } \Delta\text{FEC geldt : } \angle F_2 = 90^\circ - \angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 = \angle CDE = \angle A$$

9.



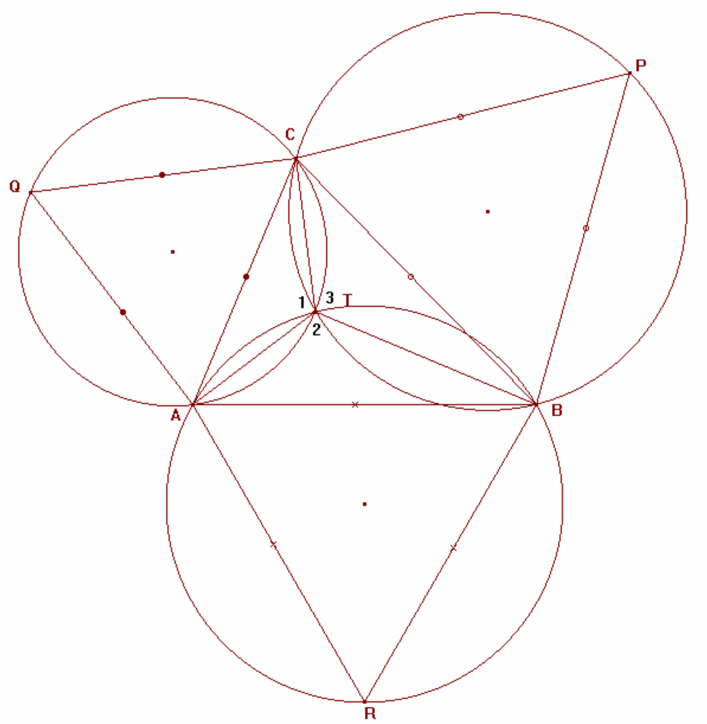
Gegeven:
Δ ABC met AC = BC . Punt P zodat ∠APB = 0,5.∠ACB en P ligt aan dezelfde kant van AB als C.

Te bew. BC = CP

Bewijs: Teken de cirkel met middelpunt C door A en dus ook door B. Neem vervolgens een punt Q op deze cirkel gelegen boven AB. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle AQB = \tfrac{1}{2}.\angle ACB(omtrekshoek)\\ \angle APB = \tfrac{1}{2}.\angle ACB(gegeven)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle AQB = \angle APB$$ $\Rightarrow$ de punten P en Q liggen op dezelfde cirkelboog AB $\Rightarrow$ P ligt dus ook op dezelfde cirkel $\Rightarrow$ BC = CP

10a.



Gegeven:
Δ ABC met de drie gelijkzijdige driehoeken ABR , BCP en ACQ naar buiten gericht.
De drie omgeschreven cirkels door de drie gelijkzijdige driehoeken.

Te bew.
De drie omgeschreven cirkels gaan door één punt.

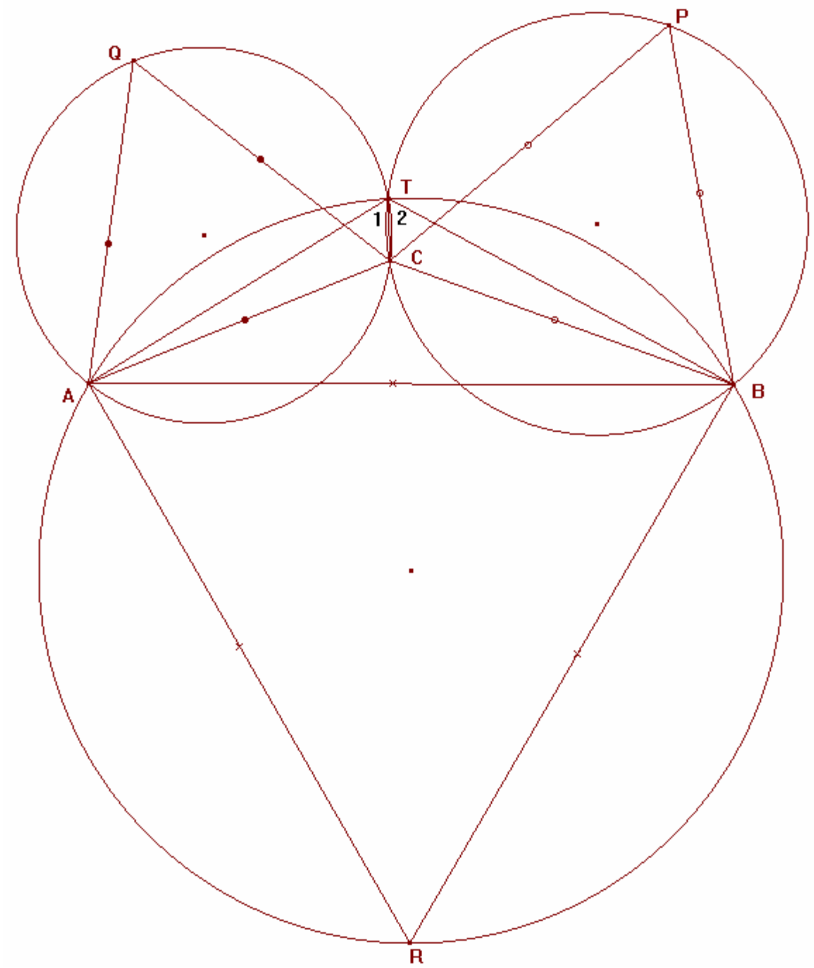
Bewijs: Stel T is een snijpunt van de omgeschreven cirkels van Δ BCP en ΔACQ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle P + \angle T_3 = 180°(koordenvierhoek)\\ \angle P = 60°(gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_3 = 120°\\ \left.\begin{array}{l}\angle Q + \angle T_1 = 180°(koordenvierhoek)\\ \angle Q = 60°(gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_1 = 120°\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle T_{12} = 240°\\ \angle T_{123} = 360°\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_2 = 120°\\ \angle R = 60°(gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_2 + \angle R = 180° \Rightarrow$$

vierhoek ARBT is een koordenvierhoek $\Rightarrow$ punt T ligt ook op de cirkel door AB en R $\Rightarrow$ de drie cirkels gaan door één punt.

b.



Gegeven:
Δ ABC met $\angle$ ACB > 120º en weer de drie gelijkzijdige driehoeken ABR , BCP en ACQ naar buiten gericht met de omgeschreven cirkels.

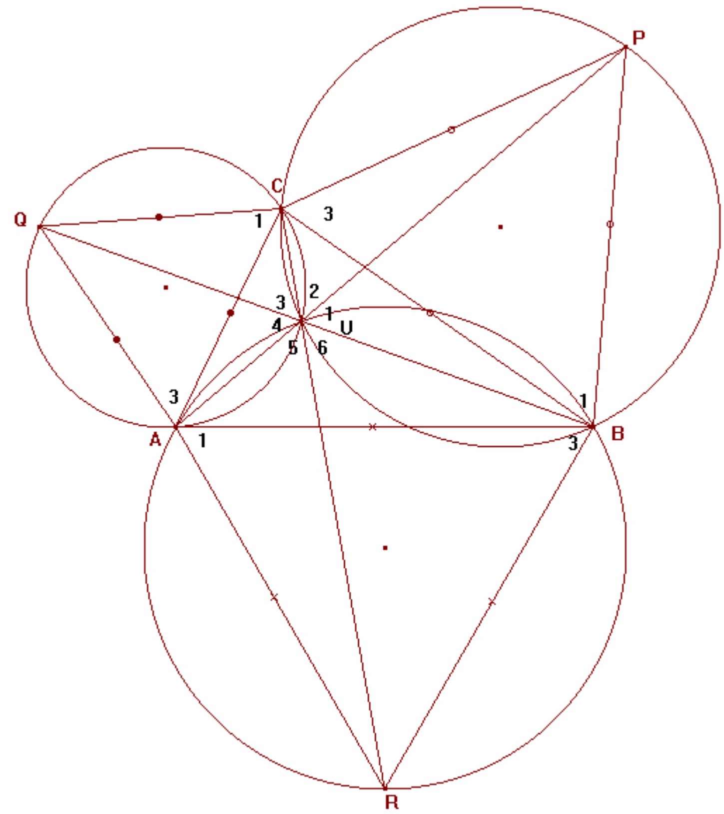
Te bew.
De drie omgeschreven cirkels snijden elkaar in één punt.

Bewijs: Stel de omgeschreven cirkels van BCP en ACQ snijden elkaar in een punt T buiten Δ ABC.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle T_1 = \angle Q (zelfde\ boog)\\ \angle Q = 60^\circ (gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_1 = 60^\circ \\ \left.\begin{array}{l}\angle T_2 = \angle P (zelfde\ boog)\\ \angle P = 60^\circ (gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_2 = 60^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_{12} = 120^\circ \\ \angle R = 60^\circ (gelijkzijdige\ driehoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle T_{12} + \angle R = 180^\circ \Rightarrow$$

vierhoek ATBR is een koordenvierhoek $\Rightarrow$ punt T ligt ook op de omgeschreven cirkel van Δ ABR $\Rightarrow$ de drie omgeschreven cirkels gaan door één punt.

11.



Zie tekening bij opgave 10.
In plaats van S heb ik U genomen.
Geg. Δ ABC met de drie gelijkzijdige driehoeken naar buiten en de drie omgeschreven cirkels. Verder de lijnstukken AP , BQ en CR

We gaan bewijzen dat deze drie lijnstukken door één punt gaan . Het snijpunt van de drie omgeschreven cirkels.

a. te bew. Δ QBC ≅ Δ APC

Bew.
$$\left.\begin{aligned} &\angle C_1 = 60° = \angle C_3 (gelijkzijdig) \Rightarrow \angle C_{12} = \angle C_{23} \\ &QC = AC(gelijkzijdig) \\ &BC = CP(gelijkzijdig) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta QBC \cong \Delta APC(zhz)$$

b. te bew. AQCU is een koordenvierhoek
Bewijs: Uit de congruentie volgt ook : ∠ BQC = ∠ PAC ⇔ ∠UQC = ∠UAC ⇒ de punten A en Q liggen op dezelfde cirkelboog UC ⇒ de punten U , A , Q en C liggen op één cirkel ⇒ UAQC is dus een koordenvierhoek.

c. te bew. ARBU is ook een koordenvierhoek.
Bewijs:
$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\angle U_{12} + \angle BPC = 180° (koordenvierhoek) \\ &\angle BPC = 60° (gelijkzijdig) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle U_{12} = 120° \\ &\left.\begin{aligned} &\angle U_{34} + \angle AQC = 180° (koordenvierhoek) \\ &\angle AQC = 60° (gelijkzijdig) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle U_{34} = 120° \\ &\angle U_{123456} = 360° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle U_{56} = 120° \\ &\angle ARB = 60° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle U_{56} + \angle ARB = 180° \Rightarrow$$

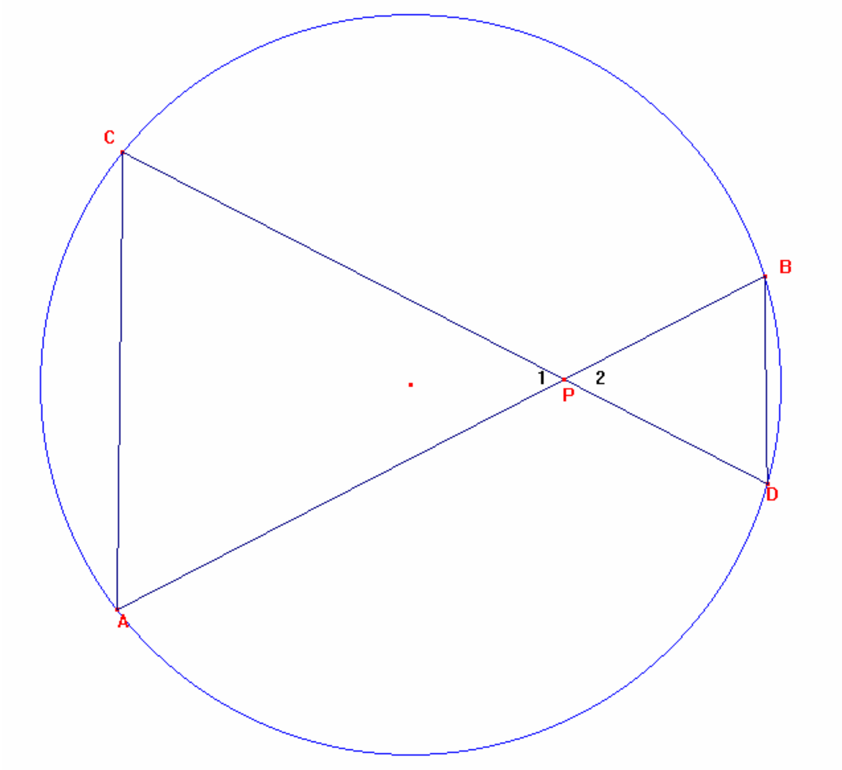
vierhoek ARBU is dus ook een koordenvierhoek.

$$\left.\begin{array}{l}\angle U_2 = \angle B_1 (zelfde\ boog) \\ \angle B_1 = 60° (gelijkzijdig)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle U_2 = 60°$$

d. $\left.\begin{array}{l}\angle U_{34} = 120^\circ (zie\ onderdeel\ \text{c}) \\ \angle U_2 = 60^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle U_{234} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ punt U ligt dus op lijnstuk AP $\Rightarrow$
AP , BQ en CR gaan door één punt U.

e. $\left.\begin{array}{l}BPCU \text{ is een koordenvierhoek } \Rightarrow U \text{ op cirkel door B,C en P} \\ \text{AQCU is een koordenvierhoek } \Rightarrow U \text{ op cirkel door A , Q en C}\end{array}\right\} \Rightarrow$
U is dus het snijpunt van de omgeschreven cirkels $\Rightarrow$ U is dus het punt T uit opgave 10.

12.



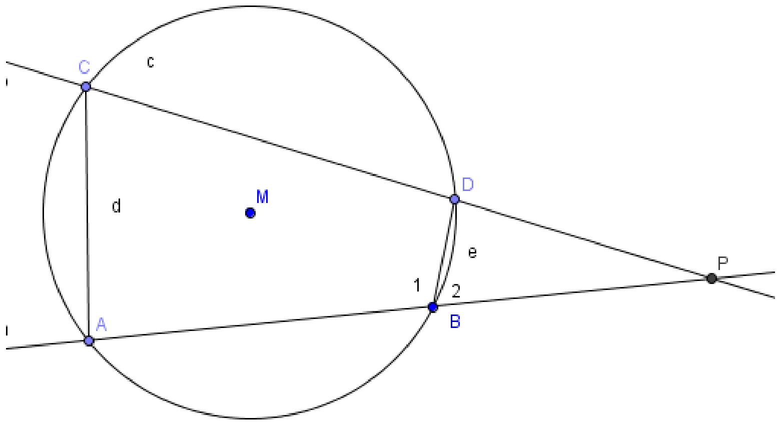
te bew.
PA . PB = PC . PD

met P binnen de cirkel.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle B (zelfdeboog) \\ \angle P_1 = \angle P_2\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta APC \text{ gelijkvormig met } \Delta DPB (hh) \Rightarrow$$

$$\frac{AP}{DP} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow AP.BP = DP.PC$$

b.



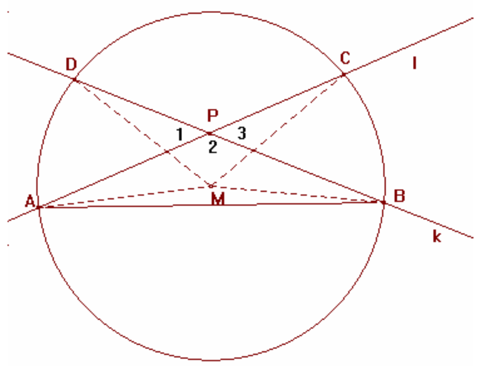
te bew.
PA . PB = PC . PD

met P buiten de cirkel

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle C + \angle B_1 = 180^{\circ}(\textit{koordenvierhoek}) \\ \angle B_2 + \angle B_1 = 180^{\circ}(\textit{gestrekte}\ \text{hoek}) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C = \angle B_2 \\ \angle P = \angle P \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CAP \text{ is gelijkvormig met}$$

$$\Delta\, BDP(\text{hh}) \Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow AP.BP = DP.CP$$

13a.



Gegeven :
Cirkel met middelpunt M .
Lijn l snijdt de cirkel in A en C en lijn k snijdt de cirkel in B en D . Snijpunt P binnen de cirkel

Te bew. $\angle$ APB = 0,5.($\angle$AMB + $\angle$ CMD)

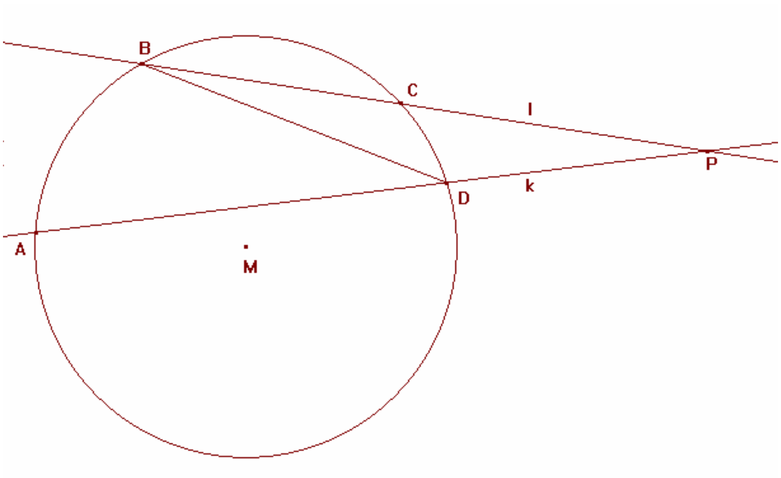
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_2 + \angle BAP + \angle PBA = 180^\circ \\ \angle BAP = \angle BAC = \tfrac{1}{2}.\angle BMC(omtrekshoek) \\ \angle ABP = \angle ABD = \tfrac{1}{2}.\angle AMD(omtrekshoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_2 + \tfrac{1}{2}.\angle BMC + \tfrac{1}{2}.\angle AMD = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \angle P_2 + \tfrac{1}{2}.(\angle BMC + \angle AMD) = 180^\circ \\ \angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ \Rightarrow \tfrac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) + \tfrac{1}{2}.(\angle BMC + \angle AMD) = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\angle P_2 = \angle APB = \tfrac{1}{2}.(\angle AMB + \angle CMD)$

13b.



Gegeven :
Cirkel met middelpunt M .
Lijn l snijdt de cirkel in B en C en lijn k snijdt de cirkel in A en D . Snijpunt P buiten de cirkel

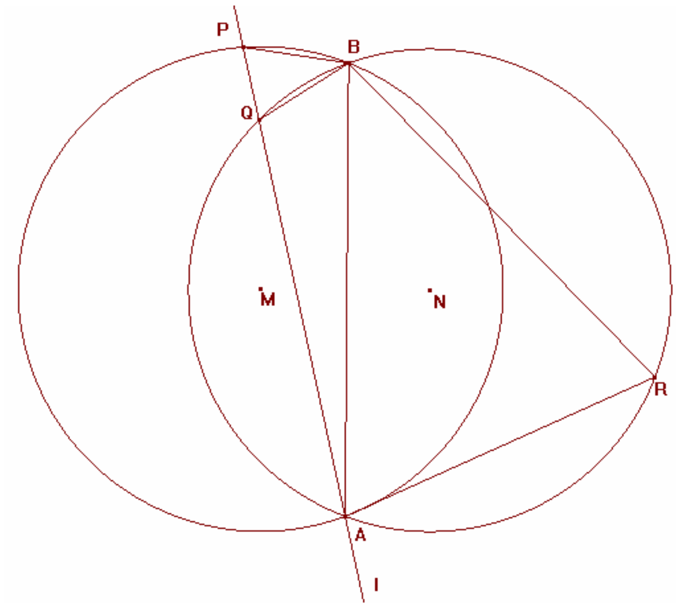
Te bew.
$\angle APB = 0{,}5.(\angle AMB - \angle CMD)$

Bewijs: Teken lijnstuk BD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle DBP + \angle DPB + \angle PDB = 180^\circ \\ \angle ADB + \angle PDB = 180^\circ (gestrekteh.)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ADB = \angle DBP + \angle DPB \\ \angle ADB = \tfrac{1}{2}.\angle AMB(omtrekshoek) \\ \angle DBP = \angle DBC = \tfrac{1}{2}.\angle DMC(omtrekshoek)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tfrac{1}{2}.\angle AMB = \tfrac{1}{2}.\angle DMC + \angle DPB \Leftrightarrow \angle DPB = \tfrac{1}{2}.(\angle AMB - \angle CMD)$

14.



Gegeven:
Twee cirkels met gelijke straal en snijpunten A en B. Lijn l snijdt de cirkels in P , Q en A.

Te bew.
Δ BPQ is gelijkbenig

Bewijs: Teken de lijnstukken PB , BQ en neem een punt R rechts van AB op de cirkel met middelpunt N . Neem voor de cirkel links het middelpunt M. Teken nog BR en AR.

$$\left.\begin{aligned} &MB = BN(zelfde\ straal) \\ &AB = AB \\ &MA = NA(zelfde\ straal) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta NAB(zzz) \Rightarrow \angle AMB = \angle ANB\ (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\angle QPB = \angle APB = \tfrac{1}{2}.\angle AMB(omtrekshoek) \\ &\angle ANB = \angle AMB(1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle QPB = \tfrac{1}{2}.\angle ANB \\ &\left.\begin{aligned} &\angle AQB + \angle ARB = 180^\circ(koordenvierhoek) \\ &\angle AQB + \angle BQP = 180^\circ(gestrekte\ hoek) \\ &\angle ARB = \tfrac{1}{2}.\angle ANB(omtrekshoek) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle BQP = \tfrac{1}{2}.\angle ANB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle QPB = \angle BQP \Rightarrow$$

$QB = PB \Rightarrow \Delta\ BPQ$ is gelijkbenig.

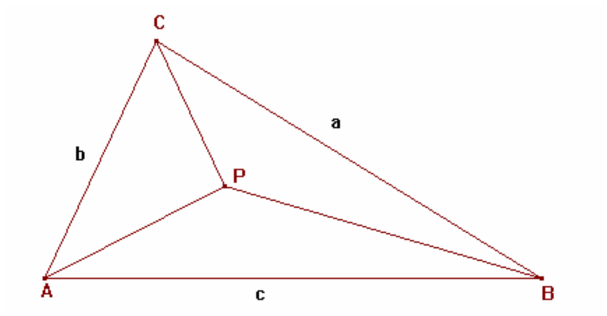
15.

a. In Δ ADC de st. van Pyth. ⇒ $AD^2 + CD^2 = AC^2$ Verder geldt dat CD > 0 ⇒ $AC^2 > AD^2$ ⇒ AC > AD

b. In Δ DBC geldt : $BC^2 = DB^2 + CD^2$ Ook geldt CD > 0 ⇒ $BC^2 > BD^2$ ⇒ BC > BD

c. Uit a en B volgt : AC + BC > AD + BD ⇔ AC + BC > AB

16



Gegeven: Δ ABC en punt P binnen de driehoek.

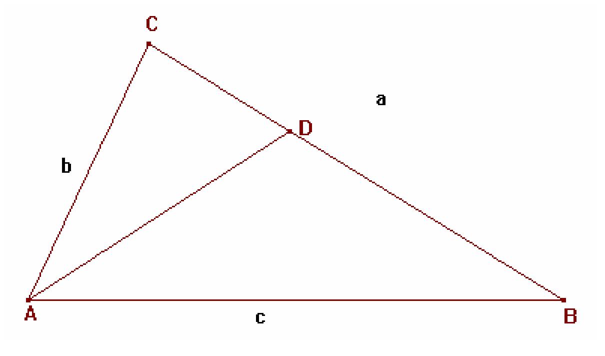
Te bew. $PA + PB + PC > s$

Bewijs:

$$\left.\begin{aligned} &AP + BP > c(stelling) \\ &BP + CP > a(stelling) \\ &CP + AP > b(stelling) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2AP + 2BP + 2CP > a + b + c \Rightarrow$$

$2.(AP + BP + CP) > a + b + c \Leftrightarrow AP + BP + CP > 0{,}5.(a + b + c) \Leftrightarrow AP + BP + CP > s$

17.



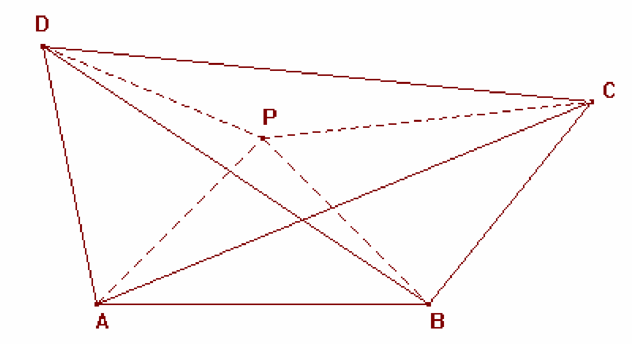
Gegeven: Δ ABC met D op BC.

Te bew. AD < s

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AD < b + CD(stelling) \\ AD < c + BD(stelling) \end{array}\right\} \Rightarrow 2.AD < b + CD + c + BD \Leftrightarrow$

$2AD < (CD+BD) + b + c \Leftrightarrow 2AD < a + b + c \Leftrightarrow AD < 0{,}5(a + b + c) \Leftrightarrow AD < s$

18.

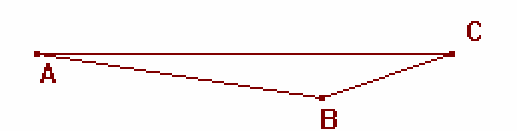


Gegeven: vierhoek ABCD en punt P binnen de vierhoek , maar niet op AC of BD.

Te bew. $AP+BP+CP+DP > BD + AC$

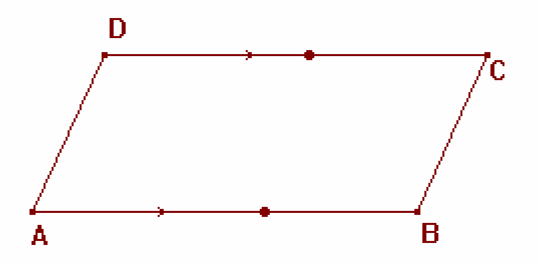
Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AP + CP > AC(stelling) \\ DP + BP > BD(stelling) \end{array}\right\} \Rightarrow AP + CP + DP + BP > AC + BD$

19a.b.



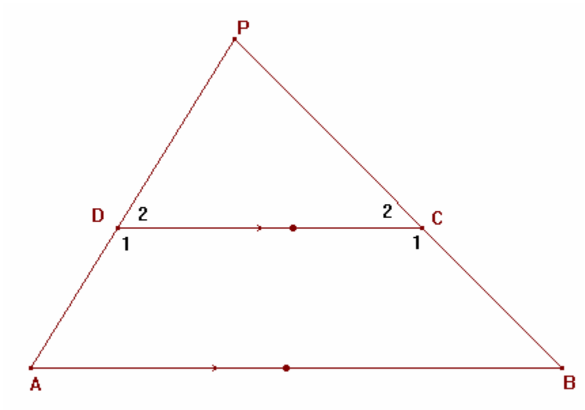
Stel B ligt niet op AC dan geldt de driehoeksongelijkheid $\Rightarrow$ AB + BC > AC en dit is in strijd met het gegeven. $\Rightarrow$ De veronderstelling dat B niet op AC ligt is dus niet correct $\Rightarrow$ B moet op AC liggen. Dus is de stelling hiermee bewezen.

20.



Gegeven: AB = CD en AB // CD

Te bew. AD // BC



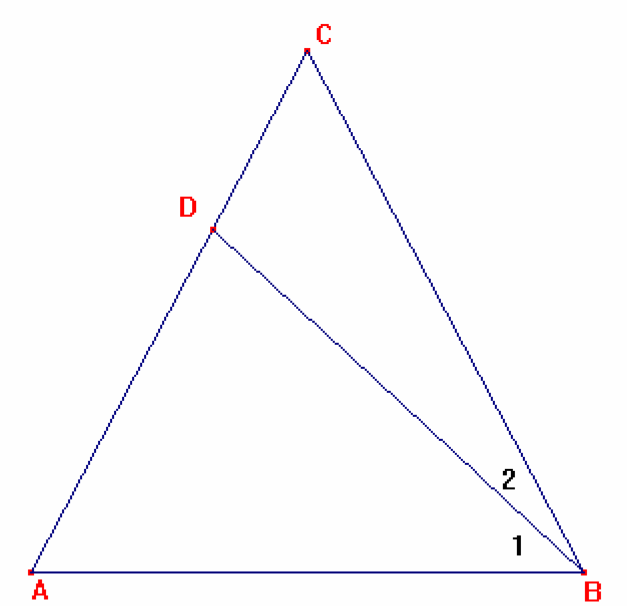
Bewijs: Stel dat AD is niet evenwijdig met BC $\Rightarrow$ AD snijdt BC in bijvoorbeeld het punt P.

$$\left.\begin{array}{l}\angle P = \angle P \\ \angle A \ = \angle D_2 (F - hoeken)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABP \sim \Delta DCP(hh) \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AP}{DP}$$ Aangezien AB = CD zou dus AP gelijk moeten zijn aan DP en dat is niet waar $\Rightarrow$ De gemaakte veronderstelling dat AD niet evenwijdig is met BC is dus niet waar $\Rightarrow$ AD // BC.

21. Geg. In Δ ABC : $\angle$ A = $\angle$ B_{12}

te bew. Uit het ongerijmde :

AC = BC



Stel AC > BC $\Rightarrow$ Er is dan een punt D op AC zodat AD = BC. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}AD = BC \\ AB = AB \\ \angle A = \angle B_{12}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta BAD(zhz) \Rightarrow \angle A = \angle B_1$$ Dit is in strijd met het gegeven dat

$\angle A = \angle B_{12} \Rightarrow$ De gemaakte veronderstelling is niet correct .
Op dezelfde manier kan ook BC niet groter zijn dan AC.
$\Rightarrow$ AC = BC.

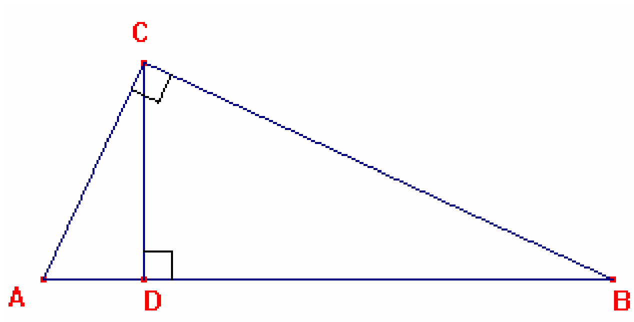
22.

a. O(Δ ADC) = 0,5 . basis * hoogte = 0,5 . CD . hoogte (trap.)
O(Δ BCD) is hetzelfde omdat de basis (CD) en de hoogte hetzelfde zijn.

b.
$$\left.\begin{array}{l} O(\Delta ADS) = O(\Delta ADC) - O(\Delta DCS) \\ O(\Delta BCS) = O(\Delta BDC) - O(\Delta DCS) \\ O(\Delta ADC) = O(\Delta BDC) \end{array}\right\} \Rightarrow O(\Delta ADS = O(\Delta BCS)$$

c. Zie de tekening. Hierin is PQ // AB .
$$\left.\begin{array}{l} \mathit{Stel}\ \text{PS} < \text{QS}\ \Rightarrow O\left(\Delta APS\right) < O(\Delta BSQ) \\ \mathit{Dan\ geldt\ ook:}\ O(\Delta DPS) < O(\Delta CSQ) \end{array}\right\} \Rightarrow O\left(\Delta ASD\right) < O\left(BSC\right)$$
Dit is in strijd met onderdeel b
Als verondersteld wordt dat PS > QS dan krijgen we op dezelfde manier weer een tegenspraak.
Uit bovenstaande volgt dus dat PS = QS.

23a.



Gegeven Δ ABC

Te bew. $c^2 = a^2 + b^2$

Bewijs.
$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \angle ACB = \angle ADC(90^o) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ACD(hh) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB.AD$$

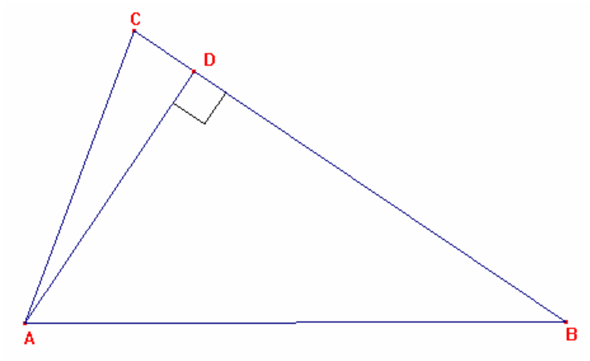
$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle BCA = \angle BDC(90^o) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta CBD(hh) \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC^2 = AB.BD$$

Uit bovenstaande volgt : $AC^2 + BC^2 = AB.AD + AB.BD \Rightarrow$
$b^2 + a^2 = AB.(AD + BD) \Leftrightarrow b^2 + a^2 = AB^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

b. Gegeven Δ ABC en $a^2 + b^2 = c^2$

Te bew. $\angle C = 90°$

Stel $\angle C < 90°$.
Dan kunnen we vanuit A een loodlijn tekenen op BC. $\Rightarrow$

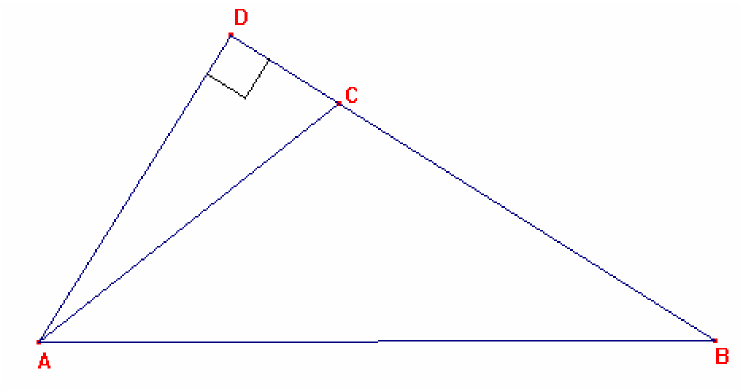


$$\left.\begin{array}{l} In\ \Delta ACD: AC^2 = AD^2 + CD^2 \\ In\ \Delta ABD: AB^2 = AD^2 + BD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2 \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BD^2 - CD^2$$

$\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + (BD + CD)(BD - CD) \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 + BC\ .\ (BD - CD) < AC^2 + BC.BC \Leftrightarrow$
$AB^2 < AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow c^2 < b^2 + a^2$ Dit is een tegenspraak. $\Rightarrow$ De gemaakte veronderstelling is dus onjuist.

Stel nu dat $\angle C > 90°$

Dan krijgen we de situatie zoals hiernaast is aangegeven. $\Rightarrow$



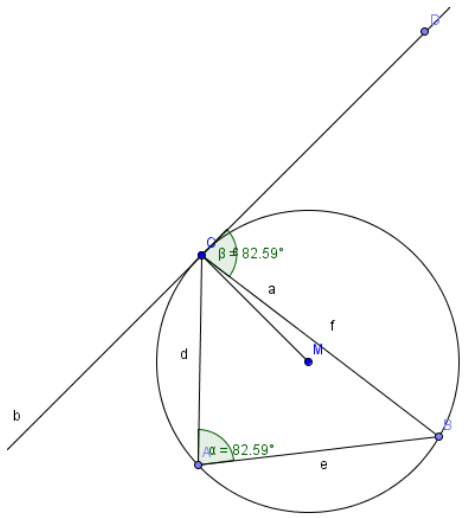
$$\left.\begin{array}{l} In\ \Delta ADB: AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ In\ \Delta ADC: AC^2 = AD^2 + CD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2 \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BD^2 - CD^2$$

$\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + (BD + CD)(BD - CD) = AC^2 + (BD + CD).BC > AC^2 + BC^2$. Dit is ook in tegenspraak met de tweede veronderstelling .

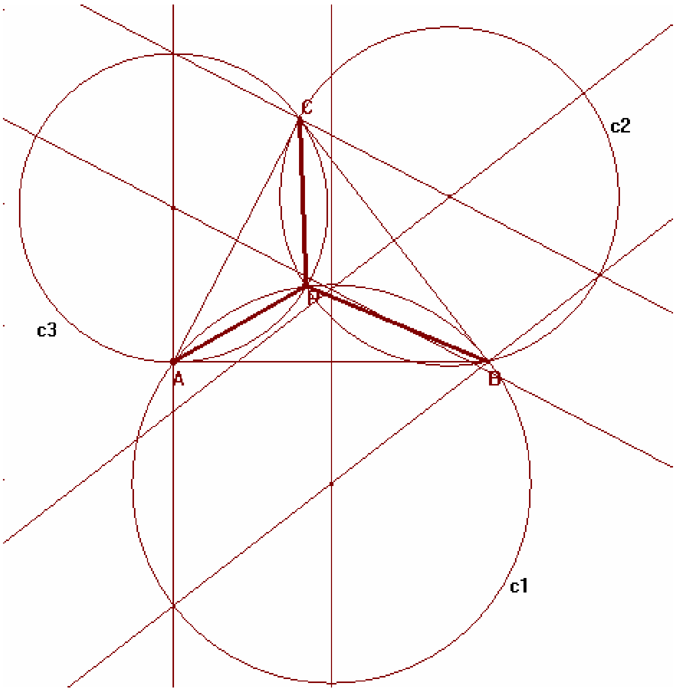
Blijft over dat geldt : $\angle C = 90°$.

24.

Het lijkt erop dat de hoek tussen de raaklijn in C en BC gelijk is aan hoek BAC.



25.

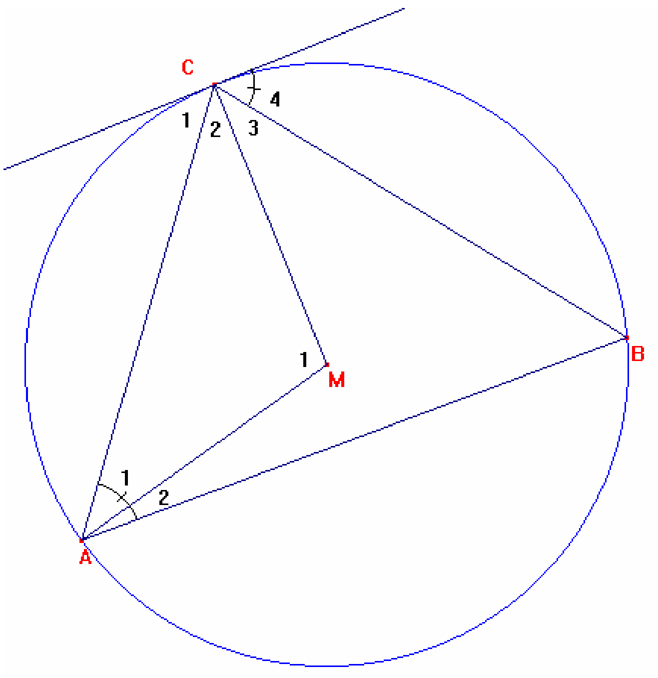


a. Zie figuur

b. Het vermoeden is, dat de drie cirkels elkaar snijden in één punt P.

c. Zo te zien geldt waarschijnlijk :
$\angle APC = \angle CPB = \angle BPA$
Maar ook zal gelden :
$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$

26a.



Gegeven :
Cirkel c met middelpunt M en de raaklijn aan deze cirkel in het punt C .

Te bew. $\angle C_1 = \angle B$

Bewijs: Teken de stralen MC en AM.
Dan geldt :

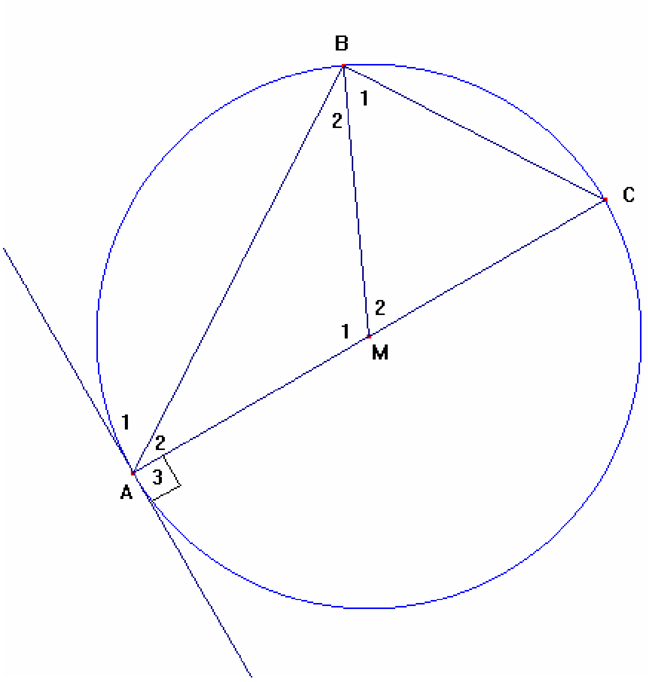
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 + \angle C_2 + \angle M_1 = 180^o \\ \angle A_1 = \angle C_2 (gelijke \text{ straal})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$2. \angle C_2 + \angle M_1 = 180° \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_2 + \tfrac{1}{2}\angle M_1 = 90^o \\ \angle C_2 + \angle C_1 = 90^o (raaklijn)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \frac{1}{2}\angle M_1 \\ \angle B = \frac{1}{2}\angle M_1 (omtrekshoek)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 = \angle B$$

26b.



Te bew. $\angle A_1 = \angle C$

Bewijs: Teken middellijn AMC.

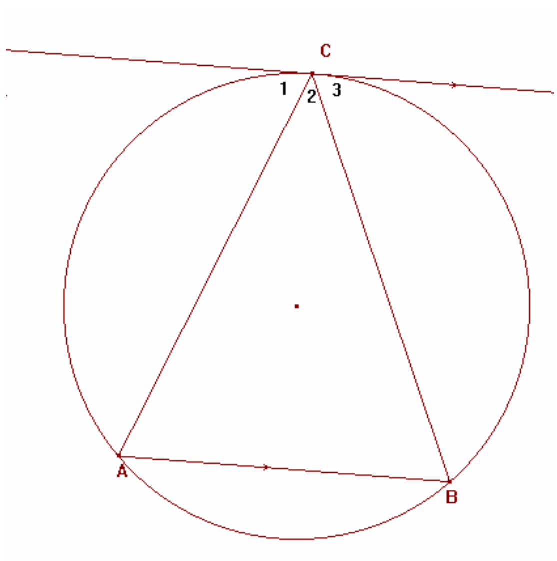
$$\left.\begin{array}{l}\angle B_{12} = 90^{\circ}(Thales) \\ \angle A_{12} = 90^{\circ}(raaklijn) \\ \angle A_2 = \angle B_2 (gelijke\ \text{straal})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle B_1 \\ \angle C = \angle B_1 (gelijke\ \text{straal})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\angle A_1 = \angle C$$

Neem Nu een willekeurig punt D op de boog onder AC , dan is $\angle$ ADB = $\angle$ ACB (gelijke boog)
Nu volgt dus ook dat $\angle A_1 = \angle$ ADB.

27.



Gegeven: Cirkel met daarop de punten A , B , C. Raaklijn in C is evenwijdig met AB.

Te bew. Δ ABC is gelijkbenig

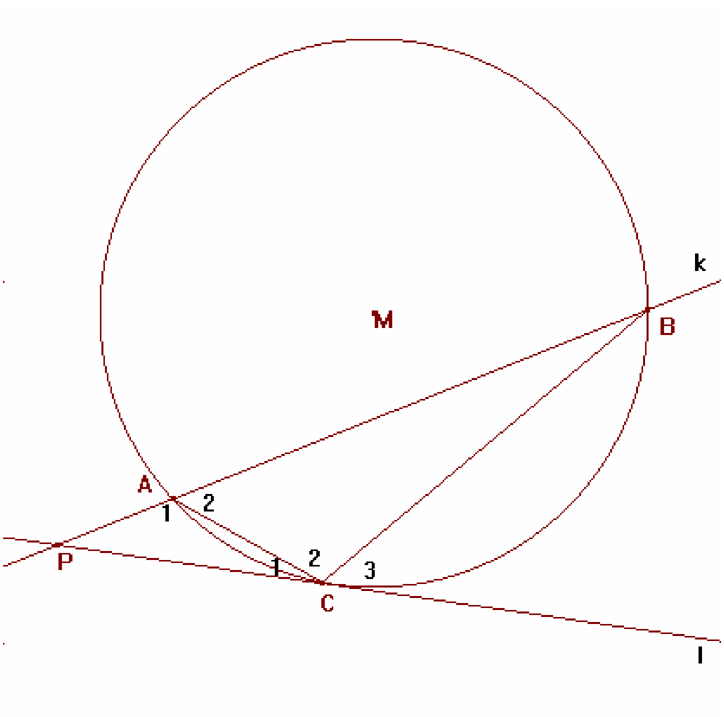
Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C_3 (z-hoek) \\ \angle A = \angle C_3 (zie\ som\ 26)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle B \Rightarrow \Delta ABC$ is gelijkbenig.

28.

Gegeven:

P buiten de cirkel ; lijn k snijdt de cirkel in A en B en lijn l is een raaklijn aan de cirkel met raakpunt C.

Te bew.
$PA \cdot PB = PC^2$



Bewijs: Teken AC en BC. $\Rightarrow$

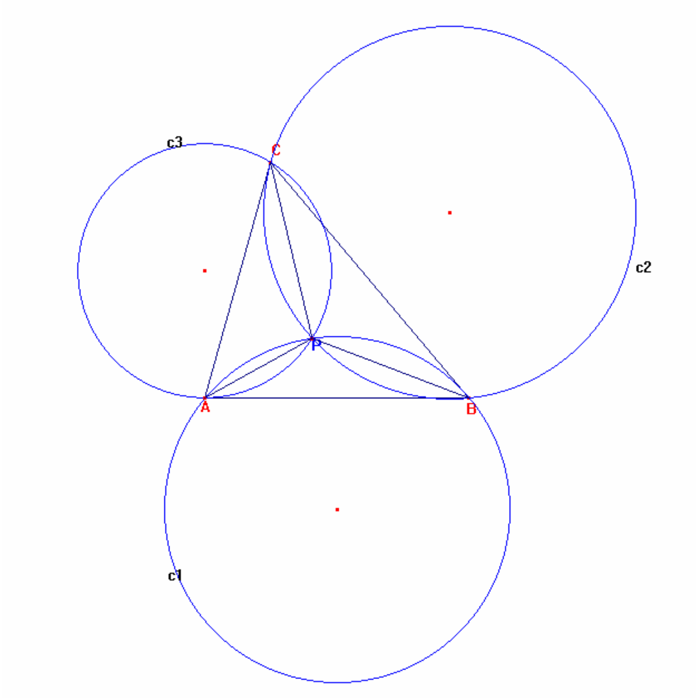
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle C_3 (gelijke\ boog) \\ \angle C_{12} + \angle C_3 = 180^\circ \\ \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_{12} \\ \angle P = \angle P\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta PCB \text{ (hh)} \Rightarrow$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC^2$$

29.

a. $\angle PAB = \angle PBC$ want deze hoeken gaan naar dezelfde boog PB.

b. Zo geldt ook $\angle PBC = \angle PCA$ want deze hoeken gaan naar dezelfde boog PC in cirkel c2. In cirkel c3 geldt vervolgens ook: $\angle PCA = \angle PAB$ want deze hoeken gaan naar dezelfde boog AP.



c. Stel een punt S is het snijpunt van de cirkels c1 en c2. $\Rightarrow$

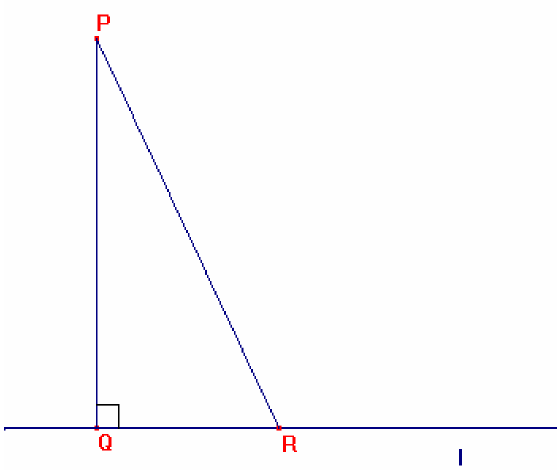
$$\left.\begin{array}{l} S \text{ op c1 } \Rightarrow \angle SAB = \angle SBC \\ S \text{ op c2 } \Rightarrow \angle SBC = \angle SCA \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\angle SAB = \angle SCA \Rightarrow S$ ook op c3

$\Rightarrow$ S en P blijken dus hetzelfde punt te zijn

$\Rightarrow$ de drie cirkels gaan dus door één punt.

30.



gegeven: lijn *l* punt P en PQ $\perp$ *l*

te bew. PQ is de kortste verbinding van P met *l*.

Bewijs: Neem een punt R op *l* niet in Q. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} PQ^2 + QR^2 = PR^2 (Pyth.) \\ QR \neq 0 \Rightarrow QR^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow PQ < PR$$

PQ is het kortste verbindingsstuk.

31.

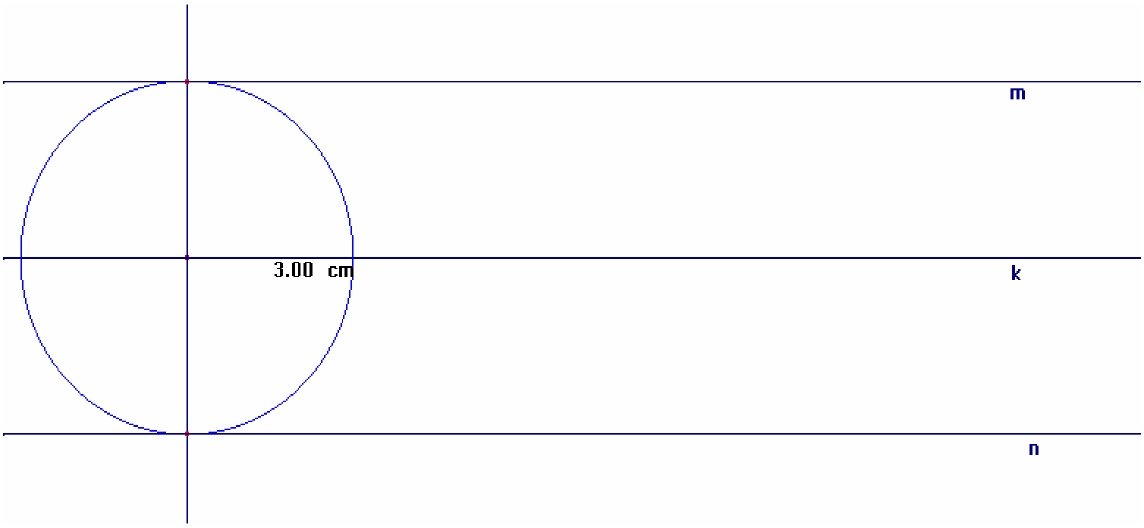
a. $d(P, A) = dP, B) \Rightarrow$ P op de middelloodlijn van AB.

b. $d(P, k) = dP, l) \Rightarrow$ P ligt op de beide bissectrices van *k* en *l*.

c. $d(P, m) = dP, n) \Rightarrow$ P ligt op de lijn midden tussen de lijnen *m* en *n*.

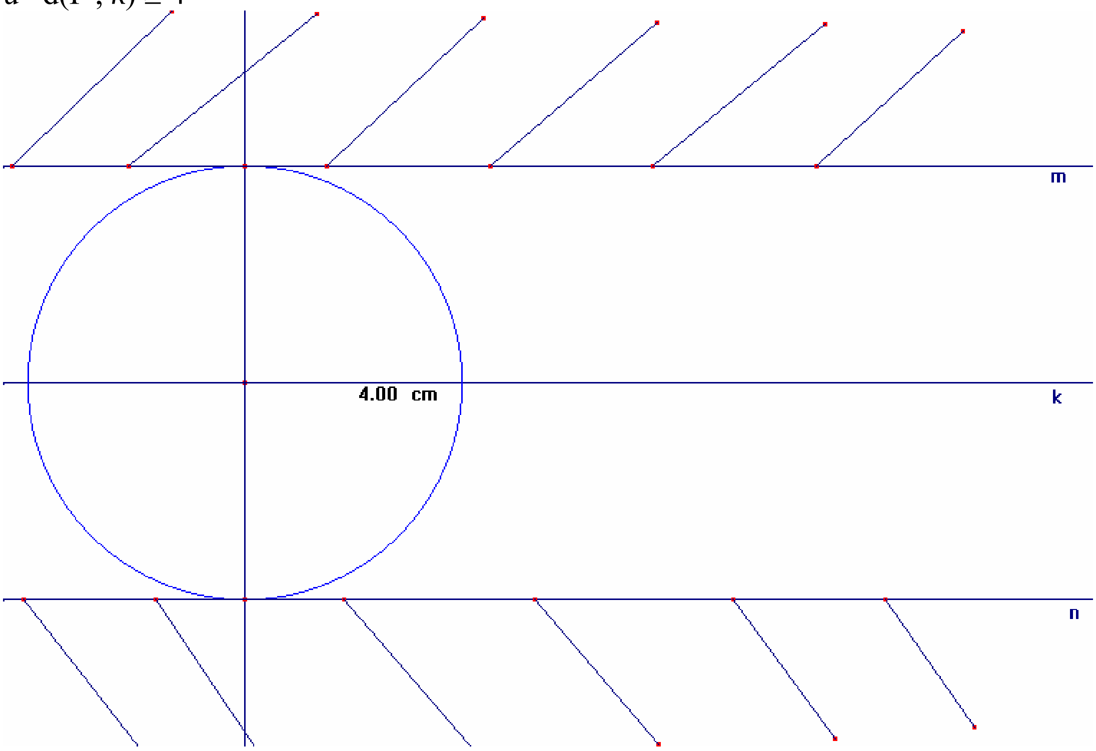
d. $d(P,M)=3 \Rightarrow$ de punten P liggen op een cirkel met middelpunt M en straal 3.

32a.



De punten P liggen op de beide lijnen *m* en *n* // k en op afstand 3 van k.

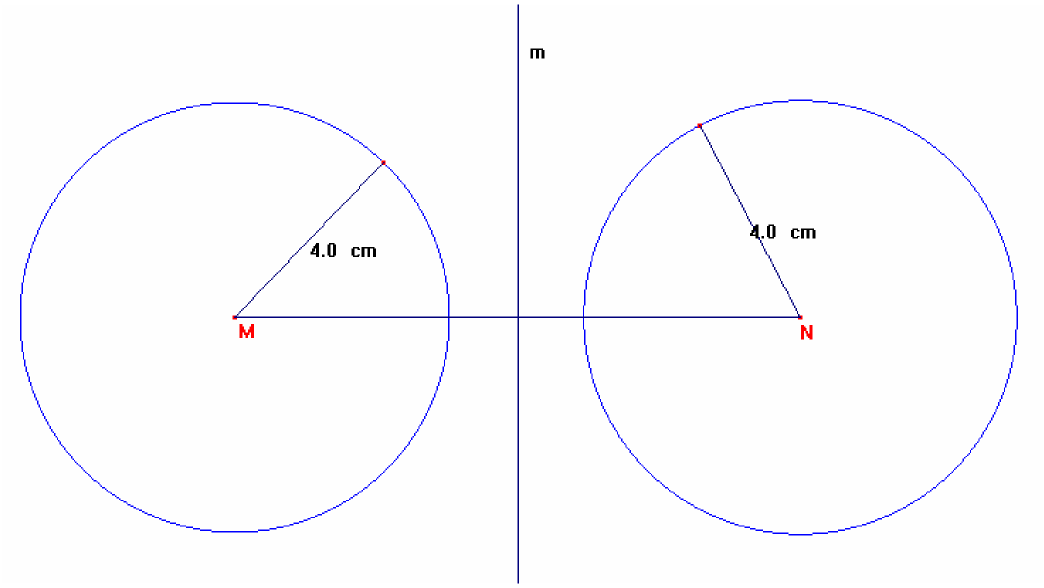
b. Nu d(P , *k*) ≥ 4



Het gevraagde gebied ligt boven lijn *m* en onder lijn *n*.

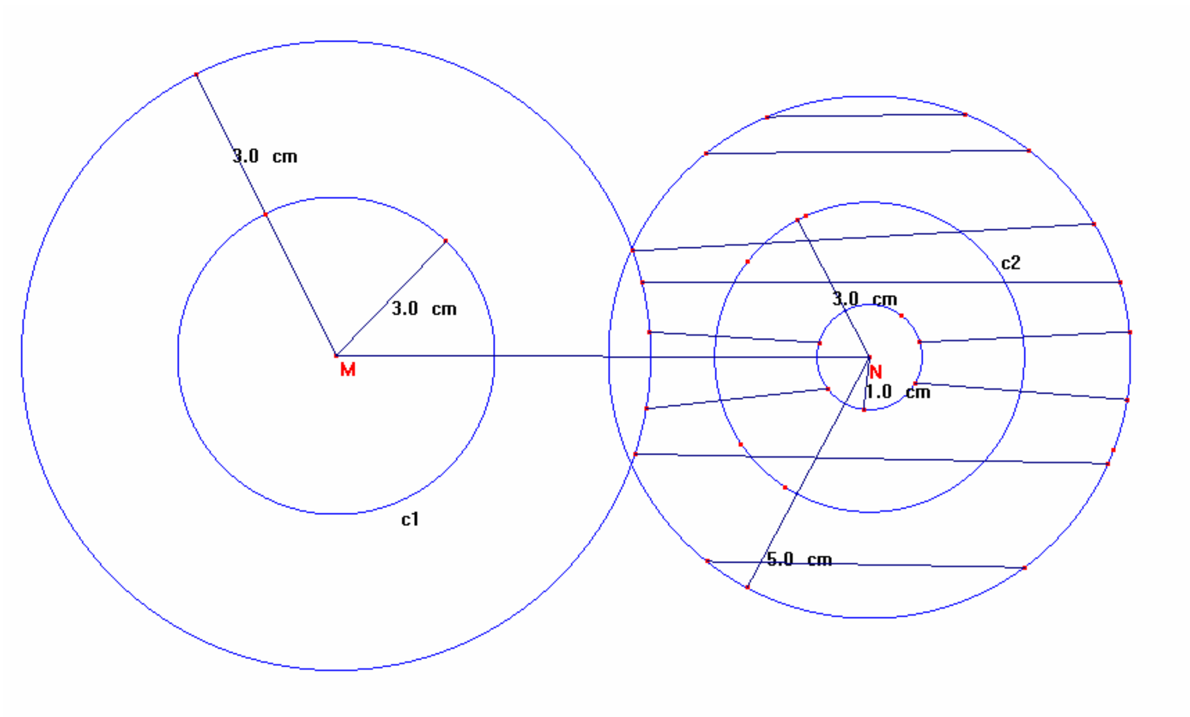
33.

a.



De mtk. pl. van de punten P met $d(P,c_1) = d(P,c_2)$ is de m.l.l. van de lijn MN.

b.



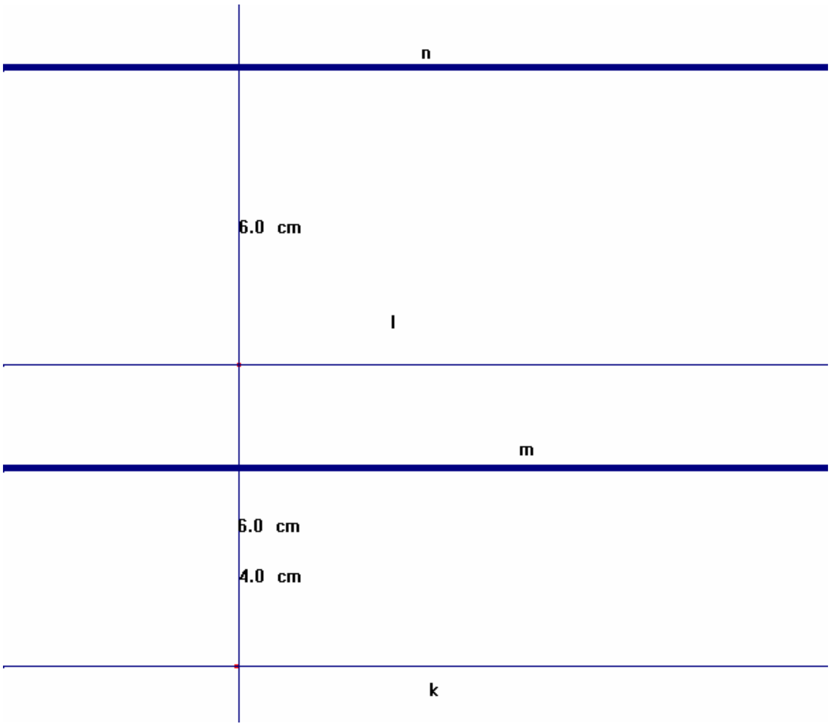
$d(P,c_1) \geq 3$ is M of het gebied buiten c_1 met straal 6.

$d(P,c_2) \leq 2$ is het gebied tussen de beide cirkels met m.p N en stralen 1 en 5.

Het gevraagde gebied is hier gearceerd.

34.

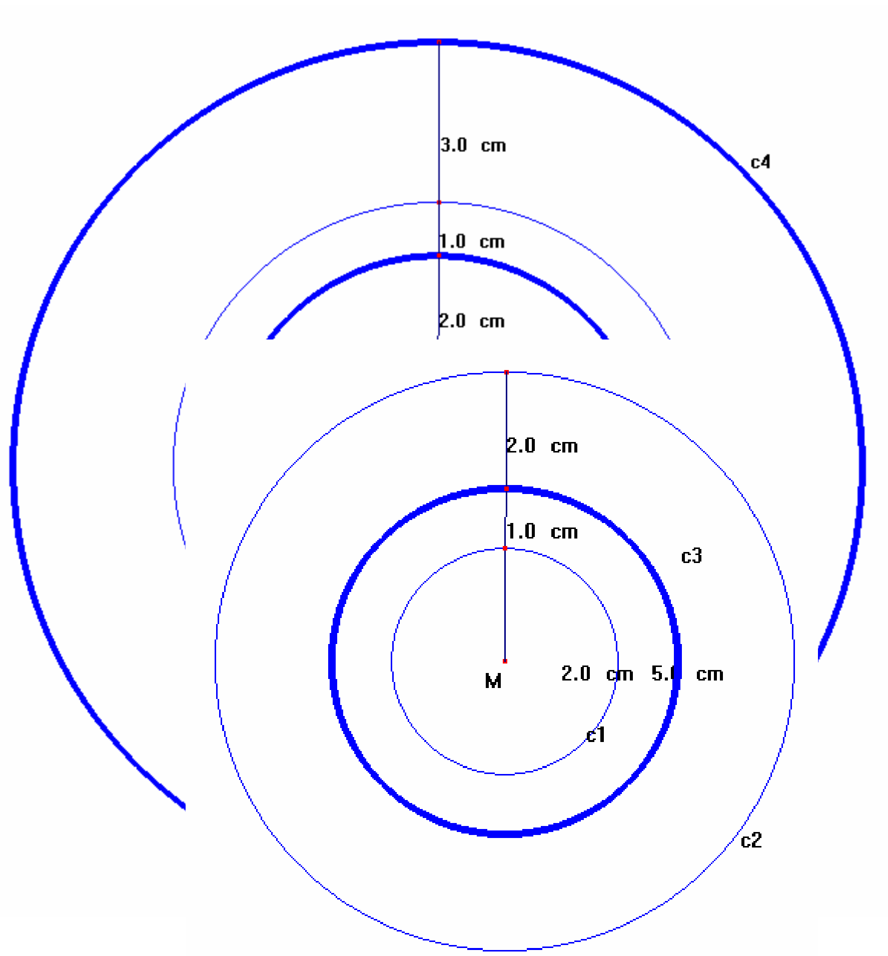
De gevraagde punten P liggen op de 2 lijnen m en n .



35.

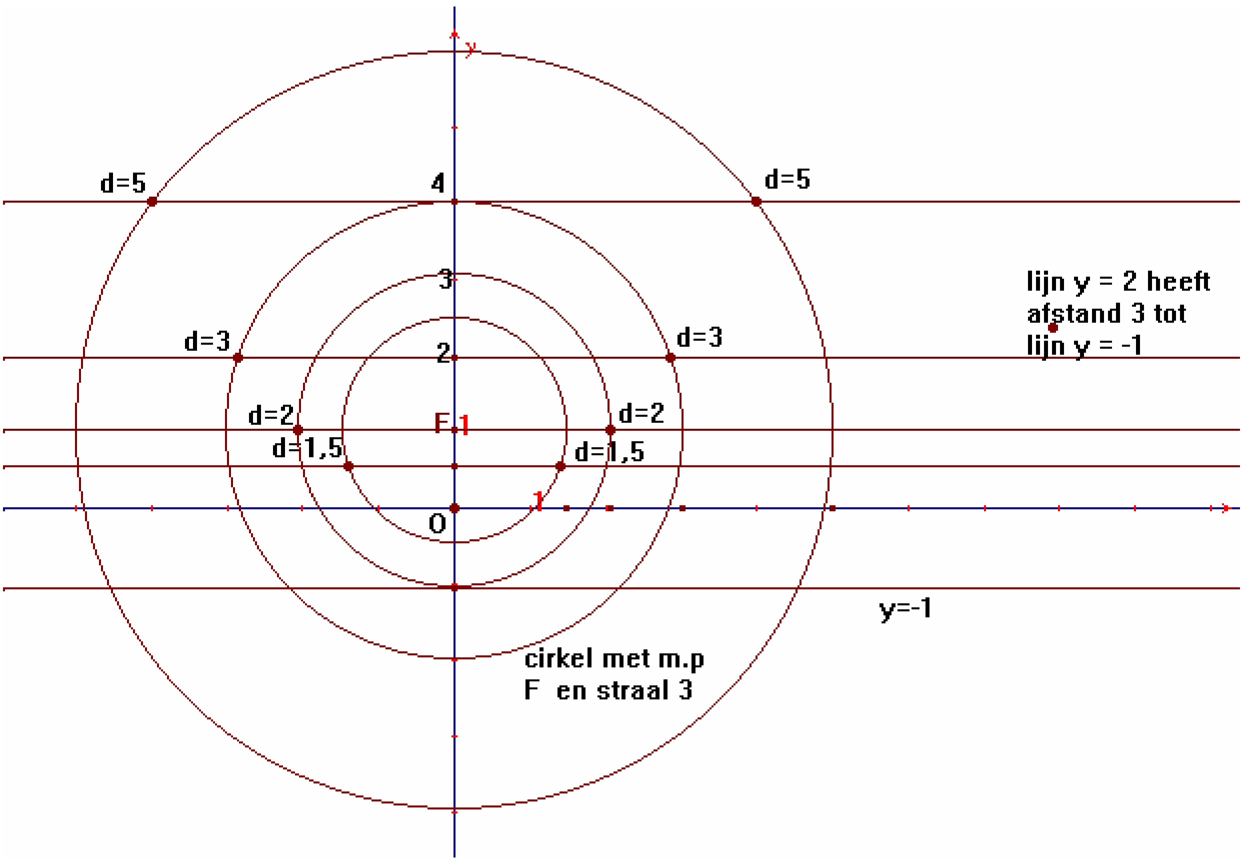
a. De gevraagde punten P liggen op de twee dikke concentrische cirkels c3 en c4.

b.



d(P,c_2) = 2 . d(P , c_1)
De meetkundige plaats is nu de cirkel c3.

36.



a. Punt $F(0 , 1)$ en de lijn $l : y = -1$

b. Voor de oorsprong O geldt: $d(O,F) = d(O,l) = 1$

c. Zie de tekening.

d. Zie de tekening .Waarschijnlijk liggen de gevraagde punten op een parabool.

e. Zie ook de tekening $P(x,y)$ dan is: $d(P,l) = y + 1$

f. De afstand van *P*(*x* , *y*) tot *F*(0 , 1) is volgens Pyth. : $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$

g. $d(P,l)=d(P,F) \Leftrightarrow y+1=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow y^2+2y+1=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow$
$4y=x^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$

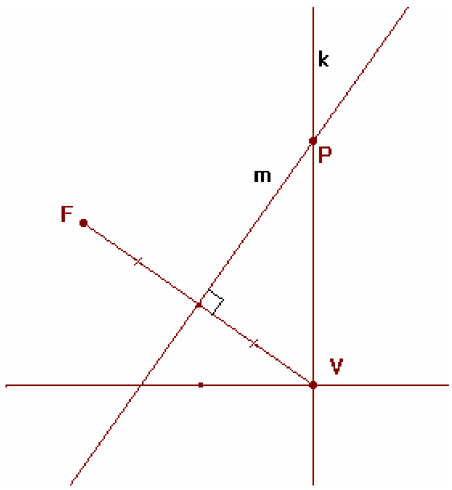
h. Dit is inderdaad de vergelijking van een parabool.

37.
Voor punt C geldt C is de meetkundige plaats van de punten A en $l \Rightarrow$ C ligt op de parabool met brandpunt A en richtlijn l.
Zo is C ook de meetkundige plaats van de punten AB en l $\Rightarrow$ C ligt dus ook op de bissectrice van AB en l. Ditzelfde verhaal geldt ook voor het punt D.

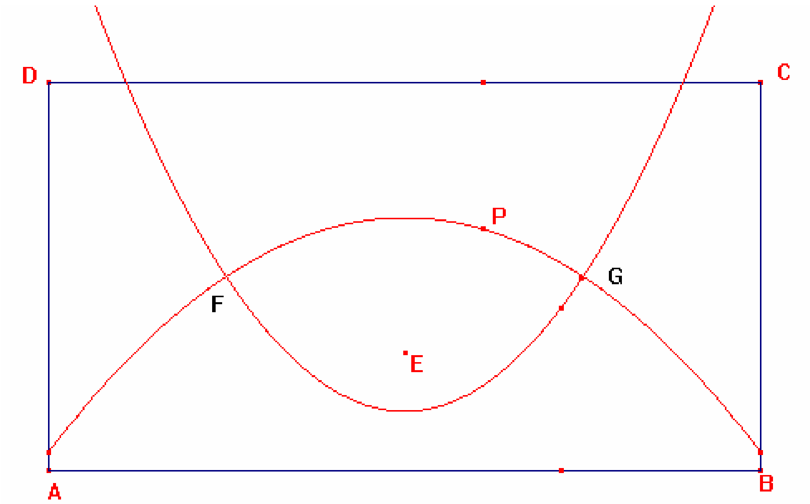
38.
Zie de figuur.

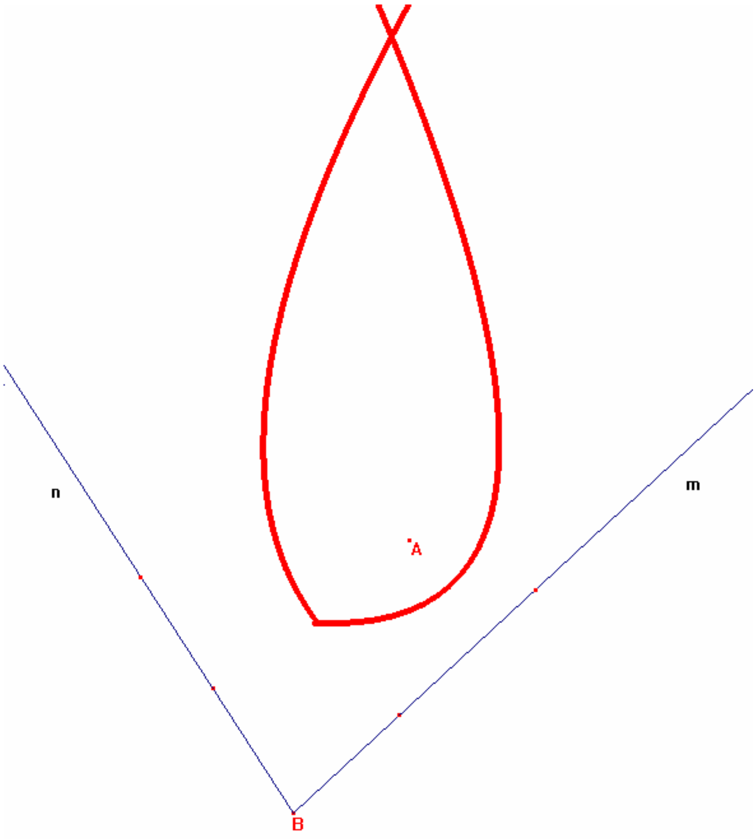
$$\left.\begin{array}{l} P \text{ op m.l.l. m van } FV \Rightarrow PF = PV \\ k \text{ is een loodlijn op } l \Rightarrow d(P,l) = PV \\ PF = d(P,F) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,F) = d(P,l) \Rightarrow$$

Punt P ligt dus op de parabool met brandpunt F en richtlijn *l*.



39.
De punten P liggen op de beide stukken parabool tussen de punten F en G.
De bovenste parabool heeft richtlijn CD en brandpunt E en de onderste parabool heeft richtlijn AB en brandpunt E.





40a.
De meetkundige plaats bestaat uit de twee stukken parabolen met richtlijn m en n en brandpunt A.

b. Voor het snijpunt van de parabolen geldt :

$$\left.\begin{array}{l} d(P,A)=d(P,m) \\ d(P,A)=d(P,n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$d(P,m)=d(P,n) \Rightarrow$ Deze snijpunten liggen dus op de bissectrices van m en n.

41. a,b,c zelf doen.

d. m is een raaklijn aan de parabool.

e. m is dan een bissectrice van $\angle$ FPV.

f. Zo te zien komt het vermoeden uit.

42.

a. Zelf doen.

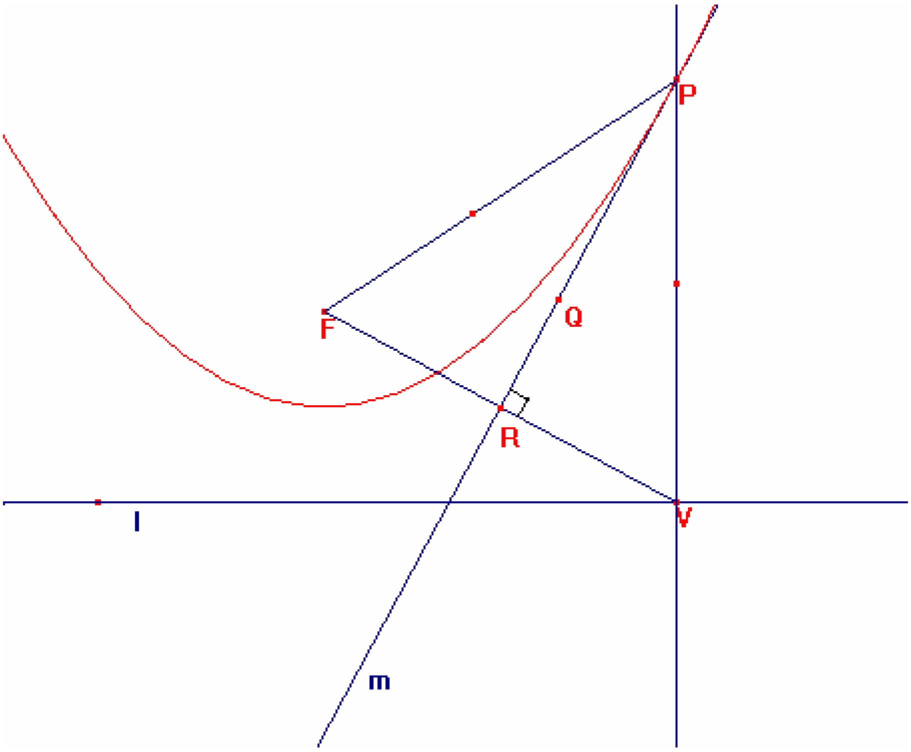
b. De meetkundige plaats is waarschijnlijk een ellips , waarbij m.l.l. m een raaklijn is aan de ellips.

c. m is waarschijnlijk een bissectrice van $\angle$ FPV.

d. Zelf doen.

e. het vermoeden komt uit.

43.



a.

$$\left.\begin{array}{l} d(Q,l) < d(Q,V) \text{ (loodlijn is de kortste afstand)} \\ \text{d(Q,V)=d(Q,F) (m.l.l.)} \end{array}\right\} \Rightarrow dQ,l) < d(Q,F)$$

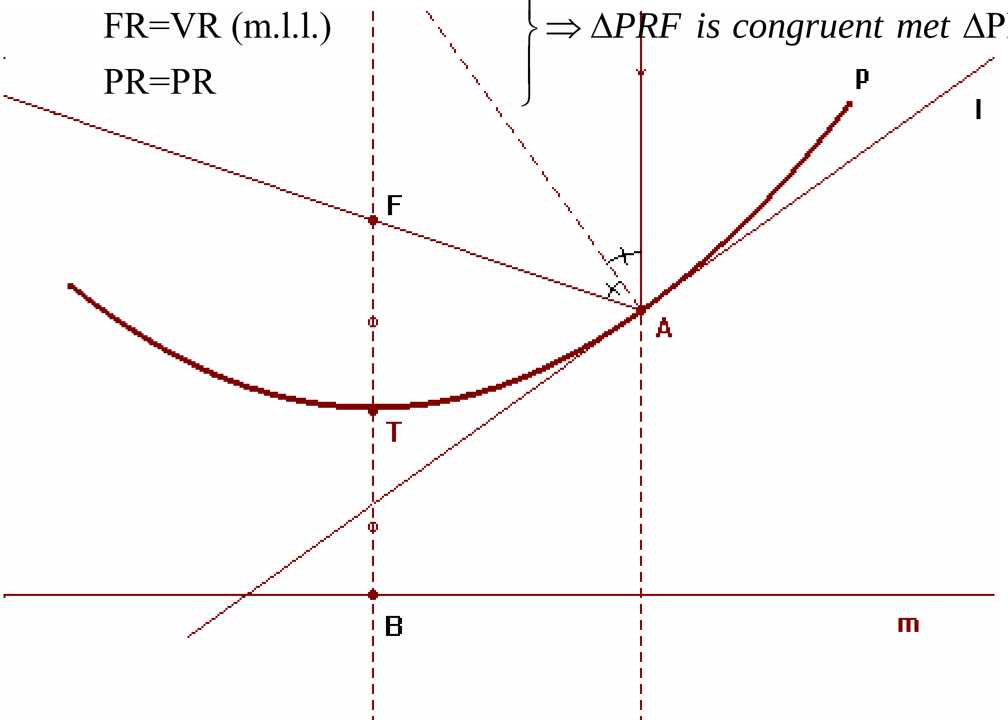
b. Bij de parabool geldt voor alle punten P dat d(P,l) = d(P,F)
Uit onderdeel a volgt dat dat niet geldt voor punt Q ⇒ Punt Q ligt buiten de parabool.

c. Aangezien voor alle punten van m behalve P geldt dat die buiten de parabool liggen , geldt dus dat m dus een raaklijn is aan de parabool.

d.

$$\left.\begin{array}{l} FP = VP(\textit{definitie}\ \text{parabool}) \\ \text{FR=VR (m.l.l.)} \\ \text{PR=PR} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PRF\ \textit{is congruent met}\ \Delta\text{PRV (zzz)} \Rightarrow$$

∠ FPR = ∠ VPR hetgeen te bewijzen was.

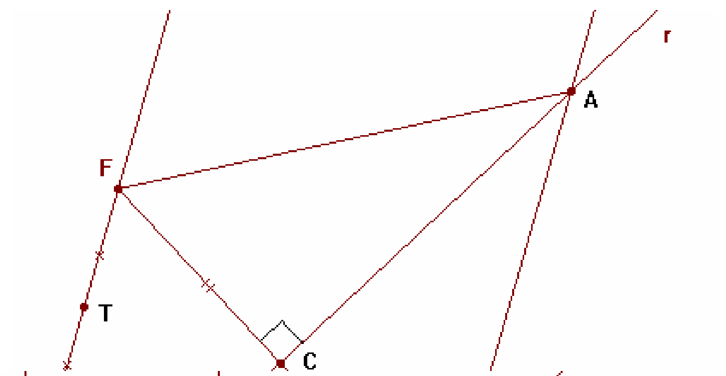


44.

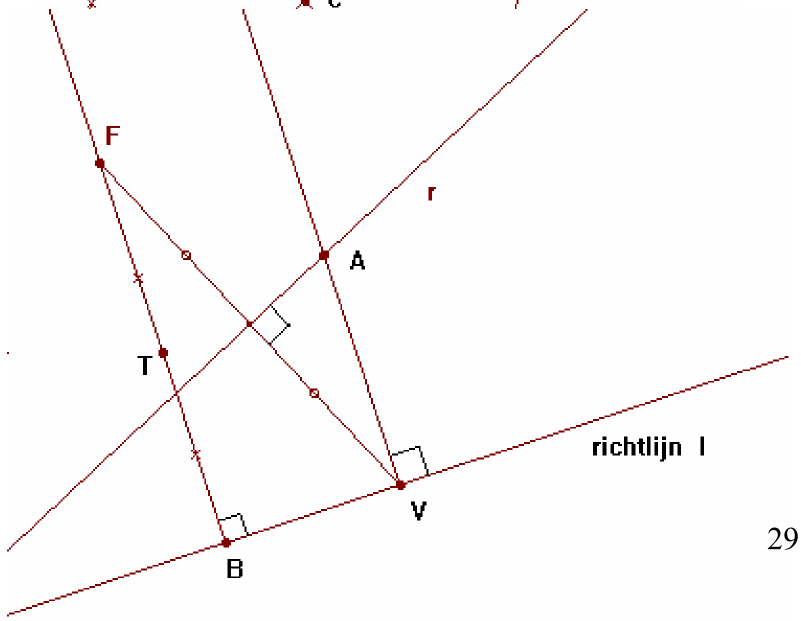
Teken eerst een lijn door A // de as die door de top T gaat. Teken dan de loodlijn in A op de raaklijn l. Gebruik de eigenschap hoek van inval is hoek van reflectie. Het snijpunt met de as is nu dus brandpunt F. Spiegel F nu in $T \Rightarrow$ punt B. Teken nu de richtlijn m door $B \perp$ de as.

45. Zie onderstaande figuur.
Gegeven punt A gelegen op de parabool p. Lijn r is de raaklijn aan p in A. Brandpunt is F.

Verbind FA . Spiegel nu punt F in de raak lijn r . Dit geeft punt V. Dit kan , aangezien raaklijn r m.l.l. is van FV. (vergelijk dit met de basisconstructie van blz. 159).
De lijn AV is evenwijdig met de symmetrieas van de parabool.
V is een punt van de richtlijn loodrecht op AV. Teken ook de symmetrieas evenwijdig aan AV en door het punt F. Dit geeft het punt B op de richtlijn. De top T is nu het midden van BF.



46. Gegeven punt A van de parabool p. Lijn r is raaklijn



aan *p* in *A*. Lijn *l* is de richtlijn van de parabool *p*.

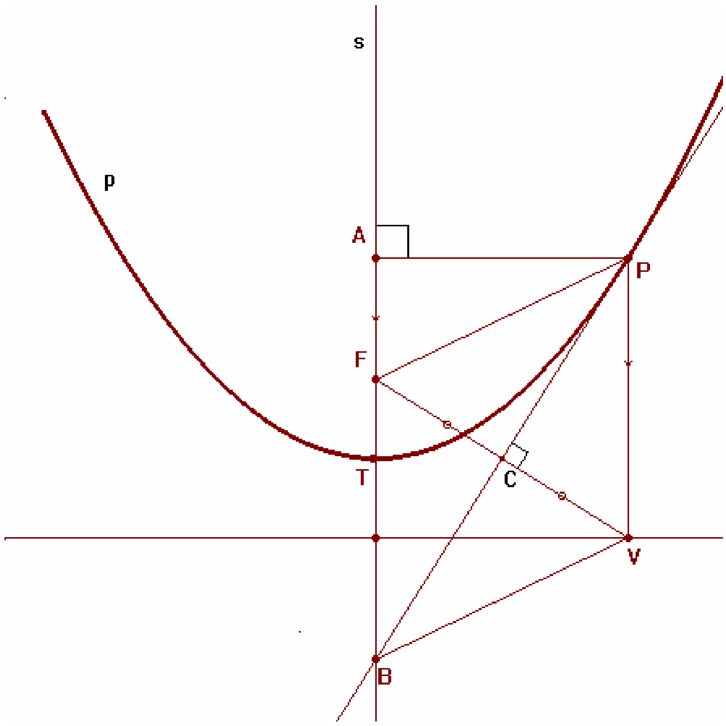
Teken eerst de lijn door *A* loodrecht op de richtlijn *l*.
Net als in de vorige opdracht is de raaklijn in *A* ook m.l.l. . Spiegel punt *V* in *r* . Dit geeft punt *F*. De loodlijn door *A* en *V* is evenwijdig met de symmetrieas. Teken dus de symmetrieas door *F*. Dit geeft punt *B*.
De top *T* is nu het midden van *BF*.

47.

a. Zie de getekende figuur.

b. Gegeven parabool p , brandpunt *F* , raaklijn *PB* in *P* aan parabool *p* . *T* is de top. *AP* ⊥ symm. as *l*.

Te bew. vierhoek *BVPF* is een ruit.



c.

$$\left.\begin{array}{l} BV = BF(\text{raaklijn in P is ook m.l.l. van } VF) \\ PV = PF(parabool) \\ \left.\begin{array}{l} VC = FC(m.l.l.) \\ \angle FCB = \angle VCP = 90^{\circ}(m.l.l.) \\ \angle CPV = \angle CBF(z-\text{hoeken want PV//s}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta VCP \cong \Delta FCB(zhh) \Rightarrow PV = FB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Bewijs:

$FP = PV = BF = BV \Rightarrow$ vierhoek $BVPF$ is dus een ruit.